

## Geniştirilmiş Çift İncelikli Sayı Formatı Kullanılarak Yüksek Dereceli Legendre Fonksiyonları ve Türevlerinin Hesabı (Computation of High Degree Associated Legendre Functions and Derivatives Using Extended Double Precision)

Nevin Betül AVŞAR, Aydın ÜSTÜN

Selçuk Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Harita Müh. Bölümü, 42075 Kampüs / Konya  
nbavsar@selcuk.edu.tr

### ÖZET

Global jeopotansiyel modeller, yeryuvarının dış çekim alanını ve buna bağlı büyüklükleri sayısal olarak değerlendirmek için kullanılır. Küresel harmoniklere dayalı bu modellerin açılım dereceleri arttıkça, serilerde yer alan Legendre fonksiyonlarını hesaplamada temel araçlar olan yineleme bağıntıları kullanılamaz duruma gelir. Ortaya çıkan sorun, Elektrik Elektronik Mühendisleri Enstitüsü (IEEE) 754 standardına göre kayan noktalı sayıların bilgisayar belleğinde saklanabilme sınırları ile ilgilidir. Bu çalışma ile bütünleşik Legendre fonksiyonları kaynaklı soruna bir çözüm geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla fiziksel jeodezide harmonik serilerle ilişkili Legendre fonksiyonları ve türevleri sayısal olarak incelenmiştir. Tam normalleştirilmiş bütünleşik Legendre fonksiyonlarında 360. derece (mertebe) için kutup noktalarına yakın bölgelerde aşağı-taşma durumu ortaya çıkmakta, çözünürlük arttıkça bu durum ekvatora doğru genişlemektedir. Geniştirilmiş çift incelikli değişken türü kullanıldığında ise tüm enlemlerde, 3816. dereceye kadar söz konusu hesaplamalar yapılabilmektedir. Ayrıca bu yöntemle, fonksiyonların sayısal doğruluğunun anlamlı ölçüde artması sağlanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Legendre fonksiyonları, Küresel Harmonikler, Normalleştirme, Yineleme bağıntıları, IEEE 754.

### ABSTRACT

Earth gravity models are used to evaluate the external gravitational field of the earth and its functionals numerically. By increasing the expansion degree of these models based on spherical harmonics, recurrence relations, which are the basic tools in calculation of the Legendre functions in series, can not be used anymore. This problem is related with the storing capacity of floating point numbers in computer memories with respect to the Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) 754 standards. In this study, it is aimed to propose a solution to the problem originated by associated Legendre functions. In this context, Legendre functions related with harmonic series in physical geodesy and its derivatives were examined numerically. In the fully normalized associated Legendre functions, an underflow problem occurs at the points close to the poles for 360th degree. As the resolution of the model increases, the underflow expands through the Equator. In case of the use of extended double precision variable type instead

of double precision, the above calculations can be executed up to 3816th degree. Additionally, a significant increase in the numerical accuracy of the functions was provided by the use of this method.

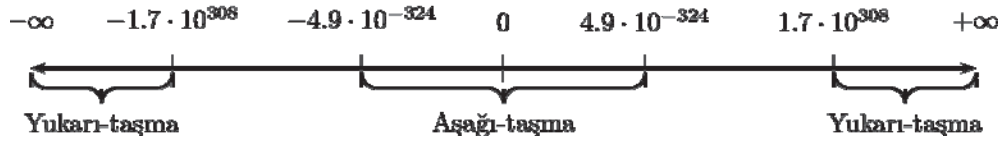
**Key words:** Legendre functions, Spherical harmonics, Normalization, Recurrence relations, IEEE 754.

### 1. GİRİŞ

Küresel harmonik katsayılarından oluşan global jeopotansiyel modeller, veri toplama ve değerlendirme tekniklerindeki gelişmelere bağlı olarak sürekli bir iyileşme göstermektedir (bkz. ICGEM, 2010). Burada iyileşme, küresel harmonik serilerle temsil edilen global çekim alanı çözünürlüğünün ve/veya doğruluğunun artması anlamındadır. Daha açık bir ifadeyle, iyileşme yerin kitle yoğunluk dağılımı hakkında bilinenenden daha ayrıntılı ve güvenilir bir bilgiye sahip olmamızı sağlar. Yükseklik anomalisi, gravite anomalisi ve çekül sapması gibi büyüklükler, yerin kitle dağılımının dolayısıyla, global çekim alanının bir sonucu olduğundan, söz konusu modellere ilişkin olumlu gelişmelerden jeodezi ve jeofizik gibi yer bilimleri yararlanır.

Genellikle son geliştirilen modellerin, öncelilere göre daha yüksek çözünürlüğe ve doğruluğa sahip olması beklenir. Gravite alanı belirlemede kullanılan yakın yer uydularının zaman içinde sayılarının artması, CHAMP (CHALLENGING Mini-satellite Payload for geophysical research and application), GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment), GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) gibi uydu görevleri ile gravite alanı bileşenlerinin doğrudan ölçülebilmesi ve yersel gravite kaynaklarındaki global zenginleşme model açılım derecelerinin yüksek değerlere çıkmasını sağlamıştır. U.S. National Geospatial-Intelligence (NGA) tarafından 2008 yılında GRACE uydu, yersel gravite ve uydu altimetre verileri ile hesaplanan Earth Gravitational Model 2008 (EGM08) modelinin 5 dakikalık açılma çözünürlüğü (konumsal çözünürlük ~9 km) karşılık gelen en

büyük açınım derecesi 2190'dır. Modelin global anlamda jeoit doğruluğu kabaca  $\pm 15$  cm seviyesindedir (Pavlis, vd., 2008).



Şekil 1. IEEE 754 standardına göre çift incelikli sayıların değer aralıkları.

Global jeopotansiyel modeller yardımıyla, yukarıda anılan jeodezik ve jeofizik büyüklüklerin konuma bağlı olarak hesaplanabilmesi için  $(n_{\max} + 1)^2$  kadar katsayının harmonik fonksiyonlar üzerinden toplama katılabilmesi gerekir (Jekeli, vd., 2007). Ancak bütünleşik Legendre fonksiyonlarının sayısal olarak değerlendirilmesindeki güçlük, bu hesabın yapılmasını zora sokar. Hesap noktasının enlemi de bunda pay sahibidir. Sorun, yüksek dereceler için Legendre fonksiyonlarının hızla büyüyen (veya küçülen) değerler almasıyla ilgilidir. Model derecesinin artması, Legendre fonksiyonlarının (Legendre polinomları + bütünleşik Legendre fonksiyonları) sayısal ortamda değerlerini veren yineleme bağıntılarının çalışmamasına neden olur. Gerçekte sayılar (artı veya eksi) sonsuza kadar gitse de, bilgisayarlarda bunun karşılığı yoktur. Hesaplanmış herhangi bir değer, negatif kayan noktalı bir sayı için alt sınır değerinden büyük, pozitif kayan noktalı bir sayı için alt sınır değerinden küçük ise aşağı-taşma (underflow) problemi ortaya çıkar. Bu durumda sayı, sistem tarafından sıfır olarak kabul edilir. Hesaplanmış değer, negatif kayan noktalı bir sayı için üst sınır değerinden küçük, pozitif kayan noktalı bir sayı için de üst sınır değerinden büyük olması durumunda ise yukarı-taşma (overflow) problemi meydana gelir ve sistem sayıyı "sonsuz (inf=infinity)" olarak düzenler. Çift incelikli sayılar için aşağı ve yukarı taşma durumları Şekil 1'de gösterilmektedir.

Legendre fonksiyonunun herhangi bir değeri için aşağı-taşma durumunda ilgili harmonik katsayılar, belirli bir derecede sonlandırılan serilerin toplamına katkı sağlayamaz. Diğer bir ifadeyle bu katsayılar, sıfır ile çarpıldığından serinin toplamına bir etkisi olmaz. Yukarı-taşma durumunda ise Legendre fonksiyonunun değeri "inf" hatası verdiği için, toplam için anlamlı bir değer elde edilemez.

Bu çalışma ile güncel jeopotansiyel modeller için, yüksek dereceli Legendre fonksiyonlarının kullanılabilirliğinin araştırılması amaçlanmıştır. Literatürde önerilen yaklaşımlara seçenek olarak

donanım-yazılım kapasitelerindeki iyileşmelere dayanan çözüm önerisi bu çalışmada sunulmaktadır.

## 2. KÜRESEL HARMONİKLER VE BİRİNCİ TÜR LEGENDRE FONKSİYONLARI

### a. Yeryuvarının Çekim Alanının Küresel Harmonikler İle Gösterimi

Çekim potansiyeli ( $V$ ), yeryuvarını oluşturan sonsuz sayıda nokta kitlenin bir noktaya uyguladığı toplam çekim etkisini ifade eder. Çekilen nokta yerin dışında olması durumunda, Laplace diferansiyel denklemini sağlamanın bir sonucu olarak,  $V=V(x,y,z)$  harmonik bir davranış sergiler. Böyle bir özellik söz konusu alanda ilgili fonksiyonun ya da fonksiyonlarının, yine harmonik fonksiyonlardan oluşan yakınsak bir seri yardımıyla gösterilmesini olanaklı kılar (Heiskanen ve Moritz, 1967; Hofmann-Wellenhof ve Moritz, 2005):

$$f(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \left[ \begin{array}{l} a_{nm} \cos m\lambda + \\ b_{nm} \sin m\lambda \end{array} \right] P_{nm}(\cos \theta) \quad (1)$$

Bu seri açınım için  $n$  dereceyi ( $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ ),  $m$  sırayı ( $m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq n$ ),  $a_{nm}$  ve  $b_{nm}$  de sabit katsayıları ( $a_{nm}, b_{nm} \in \mathbb{R}$ ) ifade eder. Küresel koordinatlar  $r, \theta, \lambda$ 'ya bağlı olarak  $f$ 'nin küre yüzeyinde ve dışında gözlenebilen herhangi bir fonksiyonu,  $a_{nm}, b_{nm}$  katsayılarını belirlemek için kullanılır.  $P_{nm}(\cos \theta)$  ise kutup uzaklığı ( $\theta$ )'ya bağlı birinci tür bütünleşik Legendre fonksiyonudur.

Yeryuvarının geometrisine uygun olarak çekim potansiyeli, Laplace diferansiyel denklemi ve onun çözümünü veren harmonik yakınsak seri küresel veya elipsoidal koordinatlar ile ifade edilebilir. Kutuplarda basık bir dönelel elipsoit yeryuvarının gerçek şekline daha yakın olsa da, sayısal uygulamaya elverişli olması nedeniyle küre tercih edilir (Üstün, 2002). Buna göre çekim potansiyeli, yeryuvarının fiziksel büyüklükleri ile

ölçeklendirilerek yeryuvarının dışında,

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $GM$  evrensel çekim sabiti ile yeryuvarının kütlesi çarpımını, kısaca yermerkezli çekim sabitini,  $R$  yeryuvarının ekvatorial yarıçapını,  $n_{\max}$  açının maksimum derecesini,  $\bar{C}_{nm}$  ve  $\bar{S}_{nm}$  tam normalleştirilmiş küresel harmonik katsayıları,  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  ise tam normalleştirilmiş birinci tür bütünlük Legendre fonksiyonunu temsil eder.

Jeodezide, tam normalleştirilmiş birinci tür bütünlük Legendre fonksiyonları,

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = \sqrt{k(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \theta) \quad (3)$$

$$k = \begin{cases} 1 & \forall m = 0 \\ 2 & \forall m \neq 0 \end{cases}$$

ile elde edilir (Torge, 2001).

Küresel harmonik katsayılar kitle integralleridir ve yeryuvarının yoğunluk dağılımının izlerini taşır. Uzun dalga boylu gravite alanı parametrelerini temsil eden düşük dereceli harmonik katsayılar uydu izleme verilerinden, orta ve kısa dalga boylu gravite alanı parametrelerini temsil eden yüksek dereceli harmonik katsayılar ise karalarda gravite ölçümlerine, denizlerde altimetre tekniklerine dayanan gravite anomalilerinden elde edilir. Eşitlik (2)'nin belirli bir derecede ( $n_{\max}$ ) sonlandırılmasının nedeni modeli oluşturmak için kullanılan verilerdeki gravite (ivme) sinyalinin uzaklığın karesi ile ters orantılı olarak azalması ve yeryüzünde gerçekleştirilen gözlemlerin sınırlı sayıda kalmasıdır.

### b. Birinci Tür Legendre Fonksiyonları

Birinci tür Legendre fonksiyonları, Legendre diferansiyel denkleminin doğrusal bağımsız iki çözümünden ilkidir (Arfken ve Weber, 2001; Avşar, 2009). Laplace diferansiyel denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümünden elde edilen üç adi diferansiyel denklemden biri olan Legendre diferansiyel denklemi,

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y(x) = 0 \quad (4)$$

özellikle küresel simetri gösteren sınır değer problemlerinin çözümünde karşımıza çıkar. Burada  $y$ ,  $x = \cos \theta$  olmak üzere  $x$ 'in fonsiyonudur. Eşitlik (4),  $m$ 'nin sıfırdan farklı değerleri için bütünlük (associated) Legendre diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.  $m=0$  olması durumunda ise (4) eşitliği;

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \quad (5)$$

eşitliğine dönüşür ve çözümlerine Legendre polinomları denir.

Legendre fonksiyonları bir üretici fonksiyon veya hipergeometrik seriler yardımıyla üretilebilirler (Abramowitz ve Stegun, 1972). Bu fonksiyonlardan ilk birkaçı,

$$\begin{aligned} P_{00} &= 1 & P_{22} &= 3(1-x^2) \\ P_{10} &= x & P_{30} &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_{11} &= \sqrt{1-x^2} & P_{31} &= \frac{3}{2}(5x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} \\ P_{20} &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_{32} &= 15x(1-x^2) \\ P_{21} &= 3x\sqrt{1-x^2} & P_{33} &= 15\sqrt{(1-x^2)^3} \end{aligned} \quad (6)$$

eşitlikleriyle verilebilir. Legendre fonksiyonlarının  $[-1, 1]$  aralığında tam ve ortogonal bir küme olma özelliği sayesinde, küre yüzeyinde tanımlı analitik fonksiyonların yüzey harmonikleri yardımıyla seriye açılımı yapılabilir.

### 3. TAM NORMALLEŞTİRİLMİŞ LEGENDRE FONKSİYONLARININ VE TÜREVLERİNİN SAYISAL OLARAK DEĞERLENDİRİLMESİ

Ortogonal fonksiyonlar için geçerli üretici fonksiyonlar (veya bunlar dışında Rodrigues formülü), Legendre fonksiyonlarının ilk birkaçı dışında daha üst dereceli eşitliklerini elde etmeye pek elverişli değildir. Özellikle sayısal değerlerin gerekli olduğu mühendislik uygulamalarında yüksek dereceli fonksiyonlara duyulan gereksinim kaçınılmazdır. Legendre gibi tam ortogonal fonksiyonlar kümesinin iki veya daha fazla üyesi arasındaki ilişkileri gösteren yineleme bağıntıları, fonksiyonların alacağı değerleri hesaplamak için kullanılır.

Yineleme bağıntıları, üretici fonksiyon kullanılarak çok değişik biçimlerde oluşturulabilir

$$(n - m + 1)P_{n+1,m} = (2n + 1)xP_{nm} - (n + m)P_{n-1,m}$$

$$\sqrt{1 - x^2}P'_{n,m+1} = 2mxP_{nm} - \sqrt{1 - x^2}[n(n + 1) - m(m - 1)]P_{n,m-1}$$

$$P_{n+1,m+1} = (2n + 1)\sqrt{1 - x^2}P_{nm} + P_{n-1,m+1}$$

$$(n - m + 1)(n - m + 2)P_{n+1,m-1} = (n + m)(n + m - 1)P_{n-1,m-1} - (2n + 1)\sqrt{1 - x^2}P_{nm}$$

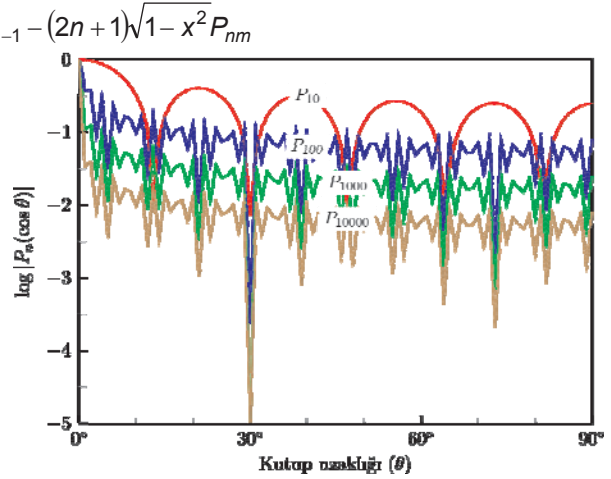
eşitlikleri ile verilebilir. Yineleme bağıntıları, Legendre fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanmasında da esastır:

$$\sqrt{1 - x^2}P'_{nm} = \frac{1}{2}P_{n,m+1} - \frac{1}{2}(n + m)(n - m + 1)P_{n,m-1} \quad (8)$$

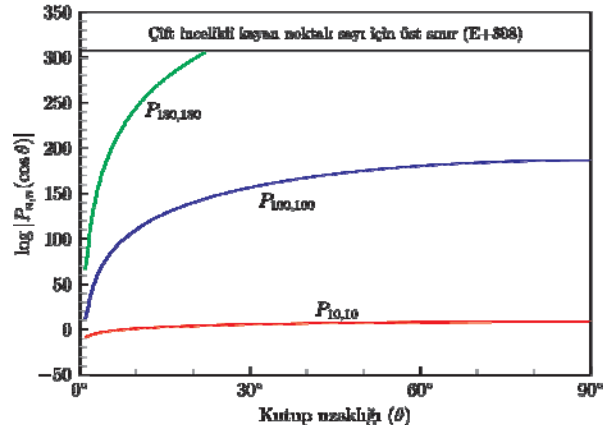
Legendre polinomları  $x = \cos \theta$ 'nin fonksiyonu olduğundan,  $[-1, 1]$  aralığında değişen kutup uzaklığına bağlı olarak değer alırlar.  $n=10,100,1000,10000$ . dereceden Legendre polinomlarının  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  arasındaki kutup uzaklığında alacağı değerlerin büyüklüğü Şekil 2'de görülmektedir. Gösterim kolaylığı açısından, fonksiyonların mutlak değerlerinin logaritması alınmış, sonuçlar ekvatora göre simetrik olacağından sadece kuzey yarım küre göz önünde bulundurulmuştur. Grafikten görüldüğü üzere,  $\theta = 30^\circ$  hariç bütün kutup uzaklıklarında, Legendre polinomları mutlak değerce  $10^{-4}$ 'ten daha küçük değer almamakta, sayısal olarak kararlı bir davranış sergilemektedir. Belirtilen açınım derecelerinde  $\theta = 30^\circ$  (ve  $150^\circ$ ) için polinomun alacağı değerler,  $P_{100} = 2.4 \cdot 10^{-4}$ ,  $P_{1000} = 7.7 \cdot 10^{-6}$  ve  $P_{10000} = 2.4 \cdot 10^{-7}$ 'dir.

Bütünleşik Legendre fonksiyonlarının değişik derecelerdeki davranışını incelemek için  $m$ 'nin sıfırdan farklı bütün değerlerini incelemek yerine, fonksiyon davranışının en düzensiz olduğu  $n=m$  durumunu değerlendirmek yeterli olacaktır. Bütünleşik Legendre fonksiyonları, Legendre polinomlarından farklı olarak 1'den büyük sonuçlar da verebilmekte ve fonksiyon derecesi arttıkça yukarıya taşma eğilimi göstermektedir (Şekil 3). Örneğin  $n=m=180$  için  $P_{nn}(x)$  yaklaşık olarak  $[23^\circ, 157^\circ]$  kutup uzaklığı aralığında, fonksiyon "inf" değerini vermiştir. Bu durumda, standart yineleme bağıntıları kullanılarak  $P_{nn}(x)$ 'in kutba yakın bölgelerdeki değerleri hesaplanamayacağından, bu değerleri esas alan aynı derecedeki fakat farklı sıradaki bütünleşik Legendre fonksiyonlarının değerleri de belirlenemeyecektir.

(Arfken ve Weber, 2001; Avşar, 2009). Bunlardan bazıları,



Şekil 2. Legendre polinomları ( $m=0$  için)



Şekil 3. Bütünleşik Legendre fonksiyonları ( $n=m$  için)

Şekil 3'den, yüksek dereceli bütünleşik Legendre fonksiyonları için bir normalleştirme işlemi gerektiği açıktır. Bu, bütünleşik Legendre fonksiyonlarının sayısal değerlerinin, IEEE 754 standardının izin verdiği (çift incelikli kayan noktalı sayı için) sınır değerlerini aşması, başka bir ifadeyle yukarı-taşma probleminin ortaya çıkmasının sonucudur.

Jeodezide yaygın olarak kullanılan tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonları ve türevleri için yineleme bağıntıları, (3) eşitliği göz önüne alınarak yeniden düzenlenebilir:

$$\bar{P}_{nm} = a x \bar{P}_{n-1,m} - b \bar{P}_{n-2,m} \quad (9a)$$



$$\bar{P}_{nn} = c\sqrt{1-x^2}\bar{P}_{n-1,n-1}, \quad n = m, \quad m > 1 \quad (9b)$$

$$\bar{P}'_{nm} = a\left(-\sqrt{1-x^2}\bar{P}_{n-1,m} + x\bar{P}'_{n-1,m}\right) - b\bar{P}'_{n-2,m} \quad (10a)$$

$$\bar{P}'_{nn} = c\left(x\bar{P}_{n-1,n-1} + \sqrt{1-x^2}\bar{P}'_{n-1,n-1}\right), \quad n = m, \quad m > 1 \quad (10b)$$

$$\bar{P}''_{nm} = a\left(-x\bar{P}_{n-1,m} - 2\sqrt{1-x^2}\bar{P}'_{n-1,m} + x\bar{P}''_{n-1,m}\right) - b\bar{P}''_{n-2,m} \quad (11a)$$

$$\bar{P}'_{nn} = c\left(-\sqrt{1-x^2}\bar{P}_{n-1,n-1} + 2x\bar{P}'_{n-1,n-1} + \sqrt{1-x^2}\bar{P}''_{n-1,n-1}\right), \quad n = m, \quad m > 1 \quad (11b)$$

Burada (9), (10) ve (11) eşitliklerindeki katsayılar,

$$a = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}$$

$$b = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(n-m)(n+m)(2n-3)}} \quad (12)$$

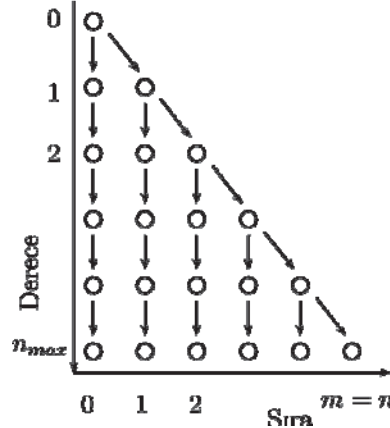
$$c = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$$

ile gösterilir (Holmes ve Featherstone, 2002).

(9), (10) ve (11) eşitliklerindeki yineleme bağıntılarının işleyişi, Şekil 4 ile açıklanabilir. Şekildeki her daire  $n$  ve  $m$ 'nin bir kombinasyonudur ve yineleme bağıntısının bir terimine karşılık gelir. Satırlar dereceleri gösterir ve dereceler aşağıya doğru artar. Sütunlar ise sıraları gösterir ve sıralar sağa doğru artar. Şekilde köşegen kısım, (9b), (10b) ve (11b) eşitliklerindeki yineleme bağıntılarının işleyişini temsil eder. Buna göre  $\bar{P}_{nn}(x)$ ,  $\bar{P}'_{nn}(x)$  ve  $\bar{P}''_{nn}(x)$ 'in sayısal değerlerine karşılık gelen köşegen üzerindeki her eleman çapraz olarak kendinden önceki daire yardımıyla hesaplanır. Hesap işlemi  $\bar{P}_{00} = 1$  ve  $\bar{P}_{11} = \sqrt{3(1-x^2)}$ ,  $\bar{P}'_{00} = 0$  ve  $\bar{P}'_{11} = \sqrt{3}x$ ,  $\bar{P}''_{00} = 0$  ve  $\bar{P}''_{11} = -\sqrt{3(1-x^2)}$  başlangıç değerleri ile başlar ( $x = \cos \theta$ ). Bu değerler köşegen elemanlarının hesaplanmasından sonra ise (9a), (10a) ve (11a) eşitliklerinde kullanılır. Bu yineleme bağıntılarında  $m$  sabit,  $n$  değişkendir (sıranın değiştiği yineleme bağıntıları tekillikleri nedeniyle kararsız olduğundan uygulamada pek tercih edilmez). Köşegen olmayan her değer yukarıdan aşağıya doğru kendinden önceki iki daire yardımıyla hesaplanır, ancak tek daire var ise sadece bu

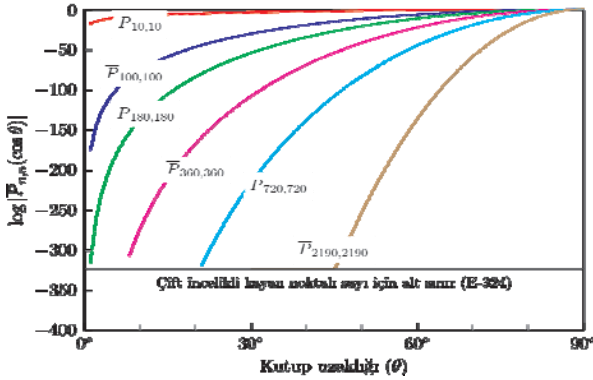
dairenin değeri kullanılır, diğer terim sıfır alınır.

Bu yöntem, ileri sütun yöntemi olarak bilinir (Holmes ve Featherstone, 2002).



Şekil 4. Tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonlarının hesabı için ileri sütun yöntemi

Normalleştirme işlemi, Legendre fonksiyonlarının değer aralıklarını belirli bir düzene soksa da bu düzen, daha yüksek derecelerde yine bozulma eğilimine girer. Bütünleşik Legendre fonksiyonları ile onların tam normalleştirilmiş değerlerinin kutup uzaklığına bağlı davranış biçimleri birbirine terstir. Şekil 3'deki durumun aksine tam normalleştirilmişlerin değerlerinde kutuplara doğru aşağı-taşma veya başka bir deyişle sıfıra yaklaşma söz konusudur. Örneğin  $n=360$  ve  $n=2190$  için sırasıyla yaklaşık olarak  $[8^\circ, 172^\circ]$  ve  $[29^\circ, 151^\circ]$  aralıkları dışında kalan (kutba yakın) bölgelerde aşağı-taşma meydana gelmiştir (Şekil 5). Legendre fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri de, Şekil 5'teki gibi fonksiyonun kendisiyle benzer bir davranış sergiler. Açınım derecesi yükseldikçe, anlamlı sonuç elde edilebilir anlam aralığı daralmaktadır. Bu durum küre yüzeyinde harmonik fonksiyonun ve fonksiyonlarının eksiksiz (tam) temsilini olanaksız kılar. Sonuç olarak bu biçimiyle normalleştirme işleminin "tam" olduğundan söz edilemez.



Şekil 5. Tam normalleştirilmiş bütünleşik Legendre fonksiyonlarının değer aralıkları (çift incelikli sayı formatına göre)

#### 4. YÜKSEK DERECELİ LEGENDRE FONKSİYONLARININ ve TÜREVLERİNİN HESAPLANMASI

Aşağı-taşma probleminin etkisi sabit çarpanlar kullanarak azaltılabilir. Örneğin Koop ve Stelpstra (1989), Wenzel (1998) bu yaklaşımı benimsemişler; Wenzel tarafından kullanılan  $10^{200}$  çarpanı  $n_{\max} = 720$  ve  $n_{\max} = 2160$  için sırasıyla  $[21.7^\circ, 158.3^\circ]$  ve  $[45.9^\circ, 134.1^\circ]$  kutup uzaklığı aralığında hesaplanabilen Legendre fonksiyonları  $[11.3^\circ, 168.7^\circ]$  ve  $[35.5^\circ, 144.5^\circ]$  aralıklarında değerlendirilebilir duruma gelmiştir. Görüldüğü gibi sabit çarpanlar da problemin çözümü için sınırlı bir iyileşme sağlamaktadır.

Problemin çözümüne yönelik daha yaygın tercih edilen yöntem, Clenshaw toplamıdır. Clenshaw toplamının jeodezideki uygulamaları ile ilgili ayrıntılı bilgi Tscherning ve Poder (1982), Gleason (1985), Holmes ve Featherstone (2002)'de bulunabilir. Holmes ve Featherstone (2002), aşağı-taşma sorununun asıl kaynağı olarak görülen  $\sin^m \theta$  büyüklüğünün, yineleme bağıntılarından ve başlangıç değerlerinden elimine edilmesine dayanan bir çözüm geliştirmişlerdir. Bu yöntem ile  $[0^\circ, 180^\circ]$  aralığındaki bütün kutup uzaklıkları için 2700. dereceye kadar başarı sağlanmıştır.

Jekeli vd. (2007) ise herhangi bir derece ve kutup uzaklığında, bütünleşik Legendre fonksiyonlarının davranışlarını temel alan farklı bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Legendre fonksiyonlarının olağan salınım hareketi belirli bir sıradan sonra aniden azalır ve hızla sıfıra yaklaşır. Jekeli vd. (2007)'lerine göre bu sıra ile fonksiyonun derecesi arasında basit bir doğrusal ilişki vardır ( $m = n \sin \theta$ ). Hesaplamalar sırasında

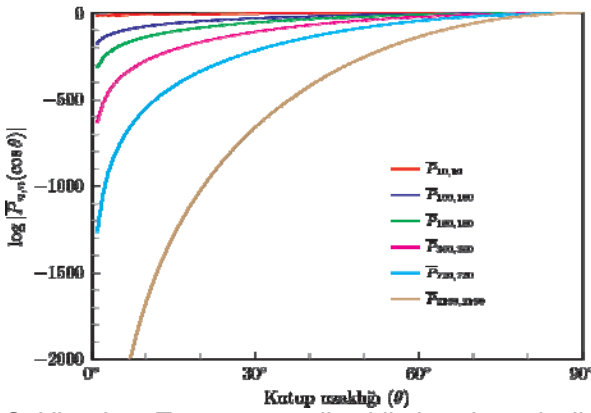
$m \geq n \sin \theta + \mu$  eşitsizliği sağlanırsa yineleme bağıntısı kesilir ve kalan bütünleşik Legendre fonksiyonlarının değeri sıfır alınır. Burada  $\mu$ , yeterince küçük değerler alan Legendre fonksiyonlarının doğruluk gereksinimlerini karşılamak için belirlenen uygun pozitif bir tamsayıdır. Böylece bütünleşik Legendre fonksiyonlarının sayısal olarak önemsiz (oldukça küçük) değerleri göz ardı edilir. Bu yaklaşımda, Jekeli vd. (2007) yaygın kullanılan yineleme bağıntılarından farklı olarak kararsız olduğu bilinen eşitlikleri kullanmışlardır. Geliştirilen bu yöntem ile bütün enlemler için açınım derecesi 10800'e (açısal çözünürlük 1 dakika) kadar yükseltilebilmiştir. Yöntem ayrıca harmonik serilerin değerlendirilmesinde bir hesap tasarrufu sağlamaktadır.

Aşağı-taşma problemi için başka bir yöntem, kayan noktalı sayıların bilgisayarda farklı bir şekilde saklanmasını sağlayan genişletilmiş-aralık aritmetiğidir (extended-range arithmetic). Smith vd. (1981) tarafından geliştirilen bu yöntemde, her kayan noktalı sayının üstü için bellekte ayrı bir yer ayrılır. Genişletilmiş-aralık aritmetiğinde IEEE 754 standardına göre temsil edilebilecek en küçük sayının mutlak değeri  $10^{-10343312045}$ 'dir. Böylece bütün enlemler için yüksek derecelerde bile açınım yapılabilir. Wittwer vd. (2008) bütünleşik Legendre fonksiyonlarının değerlerinin bulunmasında genişletilmiş-aralık aritmetiğini kullanarak, küresel harmonik serilerin analizi için bir yazılım geliştirmişlerdir. Yazılımın çalışma süresi, küresel harmonik serilerin analizine ilişkin önceki yazılımlara göre çok daha uzundur. Buna karşın yüksek kararlılık, yöntemin en önemli avantajıdır.

IEEE 754 standardına göre, kayan noktalı sayıların inceliği, genişletilmiş çift incelikli sayı formatı kullanılarak artırılabilir. Örneğin C programlama dilinde "long double" değişken tipi ile tanımlanmış her kayan noktalı sayı için bellekte 128 bit yer ayrılır. Sayının inceliği 34 basamaktır ve mutlak sınır değerleri  $10^{-4932}$  ve  $10^{4932}$ 'dir (Bingöl, vd., 2009).

Genişletilmiş çift incelikli sayı formatının hesaplamalar üzerindeki etkisini incelemek için 64 bit Linux işletim sisteminde çalışan ve g++ derleyicisi ile derlenebilen bir C kodu hazırlanmıştır. Algoritma, ileri sütun yöntemini kullanan yineleme eşitliklerine dayalıdır; daha önce tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonlarının çift incelikli değerlerini veren kodun genişletilmiş çift incelikli sayı formatı için

güncellenmiş biçimdir. Kaynak C koduna <http://193.255.245.202/~betul/Intumpnm.tgz> adresinden ücretsiz olarak erişilebilir.



Şekil 6. Tam normalleştirilmiş bütünleşik Legendre fonksiyonlarının değer aralıkları (genişletilmiş çift incelikli sayı formatına göre)

Genişletilmiş çift incelikli sayı formatı ile yeniden düzenlenen program,  $n=2190$  için hesaplanan en küçük değer yaklaşık  $10^{-3849}$  seviyelerinde olmasına izin vermiştir. Bu sonuç, bütün kutup uzaklıklarındaki hesaplanabilir en küçük değerdir (Şekil 6). Buna göre mevcut normalleştirme işleminde bir değişikliğe gidilmeksizin genişletilmiş çift incelikli sayı formatı ile EGM08 modelinin 2190'a kadar tüm derece ve kutup uzaklıklarında rahatlıkla kullanılabilir olduğu anlaşılmaktadır.

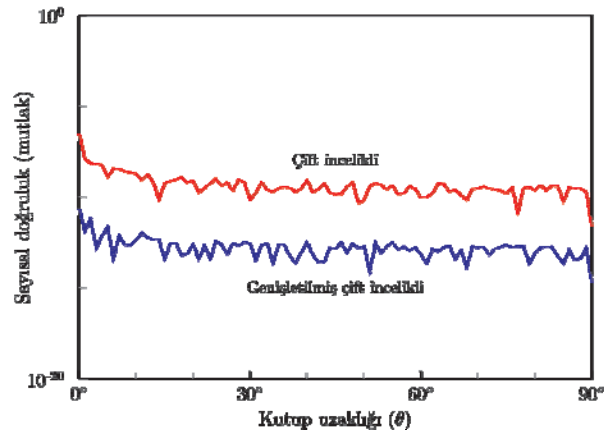
Her şeye rağmen, genişletilmiş çift incelikli sayı formatı kullanılarak da açılımın derecesi sınırlı bir sayıya kadar yükseltilebilir. Belli bir dereceden sonra aşağı-taşma probleminin gerçekleşmesi kaçınılmazdır. Örneğin bu yöntem ile kutuplara oldukça yakın bir bölge ( $\theta = 1^\circ$ ) için en çok 3816. dereceye kadar hesap yapılabilmektedir. Genişletilmiş çift incelikli sayı formatı ile Legendre fonksiyonlarının hesaplanmasında sağlanan başarı, bu fonksiyonların birinci ve ikinci türevlerini de kapsamaktadır. Belirtilen hesaplanabilirlik sınırları, türevler için de neredeyse aynıdır.

Tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonlarının sayısal doğruluğu,

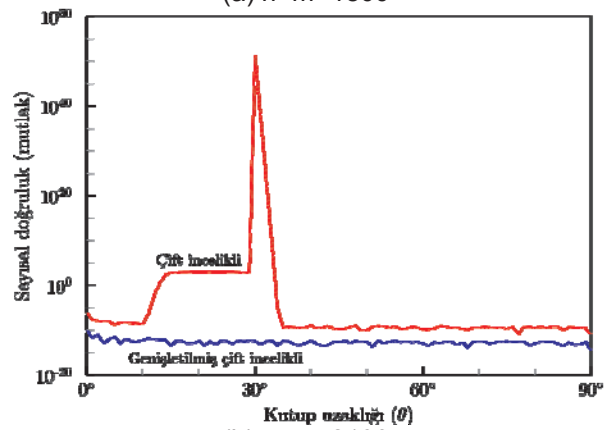
$$\sum_{m=0}^n [\bar{P}_{nm}(x)]^2 = 2n + 1 \quad (13)$$

eşitliği ile kontrol edilebilir (Wenzel, 1998). Çift incelikli ve genişletilmiş çift incelikli sayı formatları kullanılarak,  $n=m=1800$  ve  $n=m=2190$  için (13)

eşitliğinden, bütünleşik Legendre fonksiyonlarının karesel toplamalarının hatası (mutlak), bütün kutup uzaklıklarında belirlenmiştir (Şekil 7). Çift incelikli sayı formatında mutlak hata değerleri gerek 1800. gerekse 2190. dereceler için anlamlı ölçüde daha yüksektir. Aynı açılım derecelerinde genişletilmiş çift incelikli sayı ile  $10^{-15}$  seviyelerinde doğruluk sağlanırken, çift incelikli sayı formatında durum farklıdır.  $n=m=1800$  için bütün kutup uzaklıklarında çift incelikli sayı formatının doğruluğu  $10^{-7}$  ile  $10^{-10}$  arasında değişirken (kutuplara doğru daha düşük),  $n=m=2190$ 'da yaklaşık  $10^\circ - 35^\circ$  kutup uzaklığı kuşağında fonksiyonun değerlerinde çok büyük hatalarla karşılaşmaktadır. Özellikle  $30^\circ$ 'de hatanın büyüklüğü  $10^{51}$ 'e dayanmaktadır. Bu sayı formatında sadece belirli bölgelerde  $10^{-7}$  seviyelerinde bir mutlak hata ile hesaplama yapılabileceği görülmektedir.



(a)  $n=m=1800$



(b)  $n=m=2190$

Şekil 7. Legendre fonksiyonlarının sayısal doğrulukları

Sayısal incelikler sayesinde günümüze kadar geliştirilen global jeopotansiyel modellerde ( $n_{\max} = 360$ ), normalleştirilmiş bütünleşik

Legendre fonksiyonlarının doğruluğundan kaynaklı anlamlı sayılabilecek bir sorunla karşılaşmamıştır. Ancak, EGM2008'de olduğu gibi ( $n_{\max} = 2190$ ) söz konusu fonksiyonlar sayısal olarak doğru hesaplanabilir sınırdan hızla uzaklaşmaktadır. Jeopotansiyel sayı, jeoit yüksekliği, gravite anomalisi gibi jeodezik büyüklüklerin hesaplanmasında, fonksiyonun yüzey harmoniklerini oluşturan kısmı küçük değerler alır. Hatalı sayıların etkisi, bunlarla çarpılan değerlerin (katsayılar ve sabit terimlerin) sayısal büyüklüklerine göre artar ya da azalır. Şekil 7a'da görüldüğü gibi 1800. açınım derecesinde bütünleşik Legendre fonksiyonlarının doğrulukları arasında yaklaşık 1000-10000 kat fark vardır, ancak bunun jeodezik büyüklüklerin hesabında görünür bir etkisinin olduğunu söylemek zordur. Öte yandan 2190. açınım derecesinde (Şekil 7b) ise özellikle 60 derece enlemindeki büyüklükler tamamen yanlış sonuçlar olarak elde edilir. Gelecekte daha yüksek dereceli modellerin de geliştirilebileceği dikkate alındığında, hatalı sonuçların etki alanının diğer enlemlere de genişlemesi kaçınılmazdır.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, EGM08 global jeopotansiyel modeli baz alınarak, Legendre polinomları ve bütünleşik Legendre fonksiyonları sayısal olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, genişletilmiş çift incelikli sayı türünün hesap sonuçları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bu ve benzeri modellerden, yeryuvarının çekim alanına ilişkin güvenilir sonuçlar üretilmesinde Legendre fonksiyonları belirleyici bir rol oynar. Bu yüzden fonksiyon değerlerinin doğru hesaplanmasının uygulamadaki önemi büyüktür.

Çekim potansiyelinin küresel harmonik seriler ile gösteriminde kuşak harmoniklerinden sorumlu Legendre polinomları ( $m=0$ ),  $n=10000$  gibi çok yüksek derecelerde bile belirli bir sayısal kararlılığa sahiptir. Öte yandan, hücre (göze) ve dilim harmoniklerinden sorumlu bütünleşik Legendre fonksiyonları ( $m \neq 0$ ) için aynı şeyi söylemek zordur. Bu fonksiyonların tam normalleştirilmiş değerleri, uzunca bir zamandır pratik çözüm olarak kullanıla gelse de, verilen eşitlikler tam bir normalleştirmeyi garanti etmez. 360. dereceyi aşan günümüz modellerinde sayısal kararsızlık kendini yeniden göstermeye başlar. Model derecesinin artmasının yanı sıra kutuplara doğru gidildikçe, fonksiyon değerlerinin hesabı için kullanılan yineleme bağıntıları işlemez duruma gelir. Çift incelikli sayılar, bu

fonksiyonların değerlerini temsil etmede yetersiz kalır ve giderek küçülen sayılar nedeniyle aşağı-taşma sorunu ortaya çıkar. Fonksiyon değerleri kümesinde en küçük sayıları, dilim harmoniklerini ( $n=m$ ) temsil eden kesimler alır ve yineleme bağıntılarının kullanılışı gereği bunlardan hesaplanan satır (veya sütun) değerleri olası hatalardan artarak etkilenir. Bu durum jeopotansiyel modellerden belirli bölgeler için hatalı sonuçlar elde edilmesine neden olur.

Yüksek dereceli Legendre fonksiyonları için literatürde değişik çözüm yolları aransa da, sorunun temeli bilgisayarların sınırlı yazılım ve donanım kaynaklarıyla ilgilidir. Öte yandan çözüm için geliştirilen algoritma ve matematiksel yaklaşımlar, hesap sonuçlarını üretmede ya daha fazla zaman gerektirmekte ya da kullanılan eşitlikleri daha karmaşık görünümüne sokmaktadır. Bu çalışmada, tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonlarının hesabında kayan noktalı sayılar için daha fazla incelik sağlayan ve günümüz bilgisayarlarında standart duruma gelen 64 bit işletim sistemi olanaklarından yararlanılmıştır.

EGM08 modeli öncesine değin, global jeopotansiyel modeli değerlendirmek üzere hazırlanmış yazılımlar çift incelikli sayı formatında değişken türü ile düzenlenmiştir. Bu çalışmada böyle bir C kaynak kodundaki kayan noktalı değişken türleri, genişletilmiş çift incelikli sayı formatına dönüştürülmüş ve Legendre fonksiyonlarını hesaplamak için kullanılmıştır. Bu değişiklik, kayan noktalı sayılar için aşağı-taşma sınırlarının E-308'den E-4932'ye genişlemesini sağlamıştır. Elde edilen sonuçlar EGM08 model çözünürlüğünde çift incelikli değişken türüyle bazı enlem aralıklarında karşılaşılan sorunların, genişletilmiş çift incelikli değişken türünün kullanılması durumunda tamamen ortadan kalktığını göstermektedir. Bu sayı formatıyla en büyük açınım derecesi, 3816 olan bir model için bütün enlemlerde hesap yapılabilmektedir.

Dikkat çeken bir diğer nokta, hesap doğruluğunda genişletilmiş çift incelikli değişken türü ile önemli bir iyileşme sağlanmıştır. Doğruluk, çift incelikli sayılar için  $10^{-7} - 10^{-8}$  mertebesinde iken, genişletilmiş çift inceliklide bunun iki katıdır. Üstelik  $n=m=2190$ . derecede, genişletilmiş çift incelik için bu doğruluk bütün enlemlerde kesintisiz sağlanmıştır. Buna karşın, aynı çözünürlükte çift incelikli sayı formatı ile  $\theta = 30^\circ$ 'de mutlak hatanın  $10^{51}$ 'lere çıktığı gözlenmiştir.



Literatürdeki yaklaşımlara üstünlük olarak sağlanan bir başka önemli gelişme ise yöntemin tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonları için kullanılan mevcut yineleme bağıntılarında değişiklik gerektirmemesi ve bunun sonucunda hesap sürelerinin çift inceleme sayı formatı ile aynı kalmasıdır.

## KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. ve Stegun, I., 1972, **Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. Dover Publications Inc., New York, 9th edition.
- Arfken, G. ve Weber, H., 2001, **Mathematical Methods for Physicists**. Academic Pres Inc., San Diego, 5th edition.
- Avşar, N.B., 2009, **Global jeopotansiyel modeller için yüksek dereceli Legendre fonksiyonlarının sayısal olarak incelenmesi**. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Bingül, A., Beddall, A., Watsuji, N., ve Koç, S., 2009, **C++ resources**. Website. <http://www1.gantep.edu.tr/~cpp/tutorialbasic.php?topic=2>.
- Gleason, D., 1985, **Partial sums of Legendre series via Clenshaw summation**. Manuscripta Geodetica, (10):115–130.
- Heiskanen, W. ve Moritz, H., 1967, **Physical Geodesy** (çeviri: Fiziksel Jeodezi, Onur Gürkan, KTÜ Basımevi, 1984, Trabzon).
- Hofmann-Wellenhof, B. ve Moritz, H., 2005, **Physical Geodesy**. Springer, Wien.
- Holmes, S. ve Featherstone, W., 2002, **An unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalized associated Legendre functions**. Journal of Geodesy, 76(1):279–299.
- ICGEM., 2010, **International centre for global earth models (ICGEM)**. Website. <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>.
- Jekeli, C., Lee, J., ve Known, J., 2007, **On the computation and approximation of ultra-high-degree spherical harmonics**. Journal of Geodesy, 81(9):603–615.
- Koop, R. ve Stelpstra, D., 1989, **On the computation of the gravitational potential and its first and second derivatives**. Manuscripta Geodetica, (14):373–382.
- Pavlis, N., Holmes, S., Kenyon, S., ve Factor, J., 2008, **An earth gravitational model to degree 2160: EGM08**. Presented at the EGU General Assembly, Vienna, Austria, April 13–18, 2008.
- Smith, J., Olver, F., ve Lozier, D., 1981, **Extended-range arithmetic and normalized Legendre polynomials**. ACM Transactions on Mathematical Software, (7):93–105.
- Torge, W., 2001, **Geodesy**. Walter de Gruyter, Berlin, 3rd edition.
- Tscherning, C. ve Pöder, K., 1982, **Some geodetic applications of Clenshaw summation**. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 4:351–364.
- Üstün, A., 2002, **Yeryuvarının dış çekim alanının elipsoidal harmoniklere açılımı: Küresel harmoniklerden elipsoidal harmoniklere dönüşüm**. Bildirici, İ.Ö., Yiğit, C.Ö., ve Doğanalp, S. (editörler), Selçuk Üniversitesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Öğretiminde 30. Yıl Sempozyumu, 16-18 Ekim 2002, 74–86, Konya.
- Wenzel, H.G., 1998, **Ultra high degree geopotential models GPM98A and GPM98B to degree 1800**. In Proceedings of joint meeting international gravity commission and international geoid commission. Rep. 98:4, 71–80, Budapest, 10–14 March, Finnish Geodetic Institute, Helsinki.
- Wittwer, T., Klees, R., Seitz, K., ve Heck, B., 2008, **Ultra-high degree spherical harmonic analysis and synthesis using extended-range arithmetic**. Journal of Geodesy, 82(4–5):223–229.